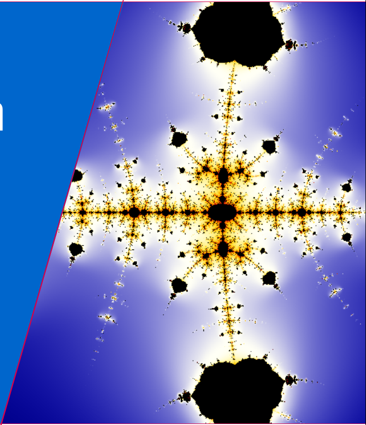
Het $3n + 1$ vermoeden



Thijs Laarhoven
t.m.m.laarhoven@student.tue.nl

Technische Universiteit **Eindhoven** University of Technology

9 juli 2009

Inhoud

Inhoud

Inhoud

Inhoud

Inleiding

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ (3n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

- (1937, Collatz) "Is er voor alle $n \geq 1$ een $k \geq 0$ met $T^k(n) = 1$?"
- Voorbeelden van minimale k met $T^k(n) = 1$:
    - $T^5(3) = 1$
    - $T^4(5) = 1$
    - $T^{11}(7) = 1$
    - $T^{13}(9) = 1$
    - $T^{10}(11) = 1$
- Maar ook:
    - $T^{70}(27) = 1$
- (1985, Erdös) "De wiskunde is nog niet klaar voor zulke problemen"

Varianten

- $pn + q$ problemen: Generaliseer 3, 1 naar p, q

$$T_{p,q}(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ (pn+q)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

- Collatz-achtige problemen: Generaliseer 2 naar m gevallen

$$C_m(n) = \begin{cases} (a_0 n + b_0)/m & n \equiv 0 \bmod m \\ (a_1 n + b_1)/m & n \equiv 1 \bmod m \\ \vdots & \vdots \\ (a_{m-1} n + b_{m-1})/m & n \equiv m-1 \bmod m \end{cases}$$

- Voorbeeld: 3 gevallen

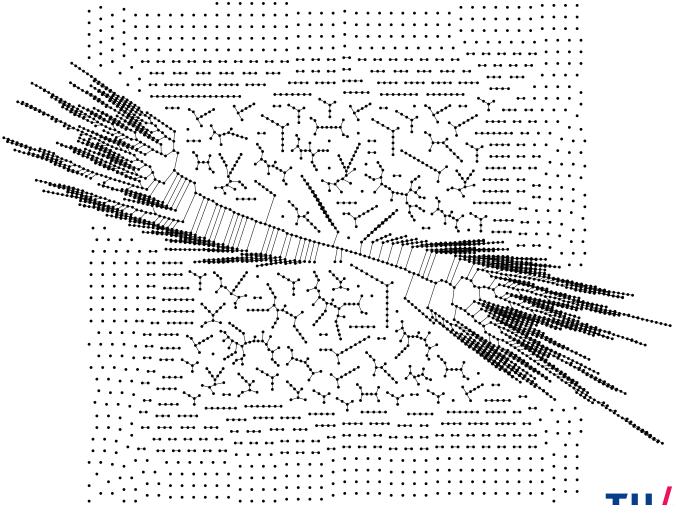
$$C_3(n) = \begin{cases} n/3 & n \equiv 0 \bmod 3 \\ (2n+1)/3 & n \equiv 1 \bmod 3 \\ (4n+1)/3 & n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

Terminologie

- Collatz-graaf: $\mathcal{G}_\infty = (V, E)$ met:
  - $V = \mathbb{N}_+$
  - $E = \{(n, T(n)) \mid n \in \mathbb{N}_+\}$
- Pad: Reeks $\{c_0, T(c_0), T^2(c_0), \ldots\} = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$
- Cykel: Pad $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}\}$ met $T(c_{k-1}) = c_0$
- Convergent pad: Reeks $I_C = \{\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}\}$
- Divergent pad: Reeks $I_P = \{\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots\}$ met $c_i \to \infty$
- Component: Maximaal verbonden verzameling oneindige paden
  - Elk component bevat óf divergente paden, óf één cykel
- Level $\ell(n)$: 'Afstand' tussen n en vast punt n_0 in een component
  - Als $n_0 = 1$ dan geldt volgens het pad $(3, 5, 8, 4, 2, 1)$ dat $\ell(3) = 5$
  - $\ell(T(n)) = \ell(n) - 1$ als n niet in een cykel zit
  - $\ell(T(n)) \equiv \ell(n) - 1 \pmod{k}$ als n in een cykel zit van lengte k
- $3n + 1$ vermoeden: Enige component is $\mathbb{N}_+$ met cykel $(1, 2)$

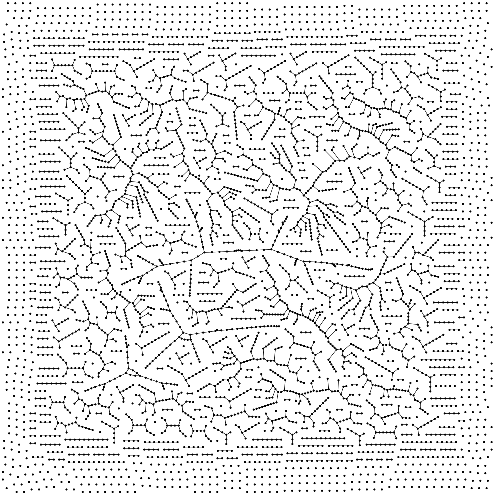
Terminologie

- Voorbeeld: $3n+1$ probleem, restrictie tot $\{1, 2, \ldots, 5000\}$
- Cykels: $\{(1, 2)\}$

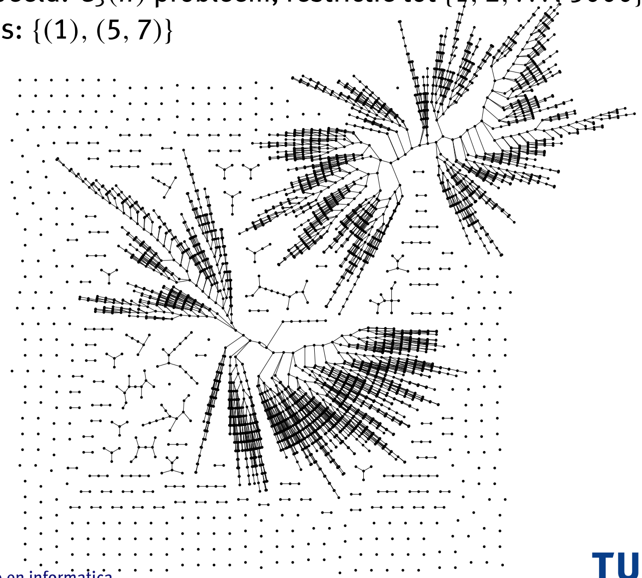


Terminologie

- Voorbeeld: $5n + 1$ probleem, restrictie tot $\{1, 2, \ldots, 5000\}$
- Cykels: $\{(1, 3, 8, 4, 2), (13, 33, \ldots, 52, 26), (17, 43, \ldots, 68, 34)\}$



- Voorbeeld: $C_3(n)$ probleem, restrictie tot $\{1, 2, \ldots, 5000\}$
- Cykels: $\{(1), (5, 7)\}$



1. De Collatz graaf en zijn spectrum

Eigenwaarden en -vectoren van de Collatz-graaf

Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

9 juli 2009

De Collatz-graaf

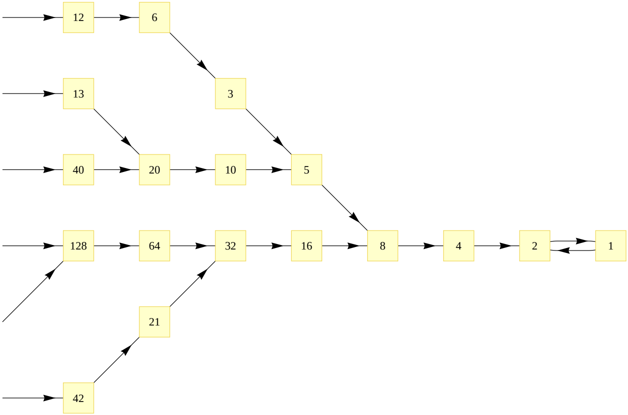
- Bekijk de verbindingsmatrix A van de Collatz-graaf $\mathcal{G}_\infty$

$$A = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & \cdots \\
1 & . & . & 1 & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & \cdots \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & \ddots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

- A vooruit in de graaf
- $A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{T(i)}$
- Eigenwaarden? Eigenvectoren?

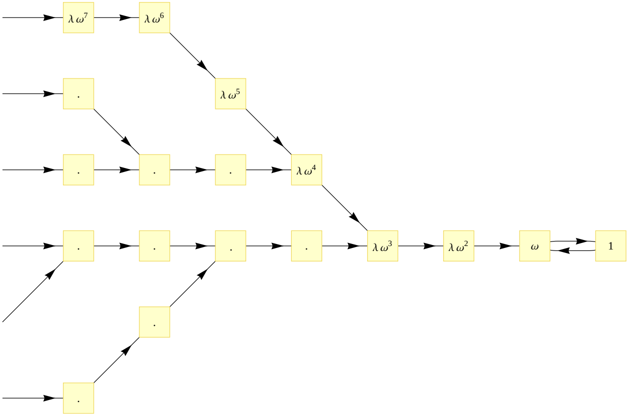
Matrix A: Eigenwaarden bij cykels

- Voorbeeld: $3n + 1$ probleem
- Component G_C met cykel $C = (1, 2)$



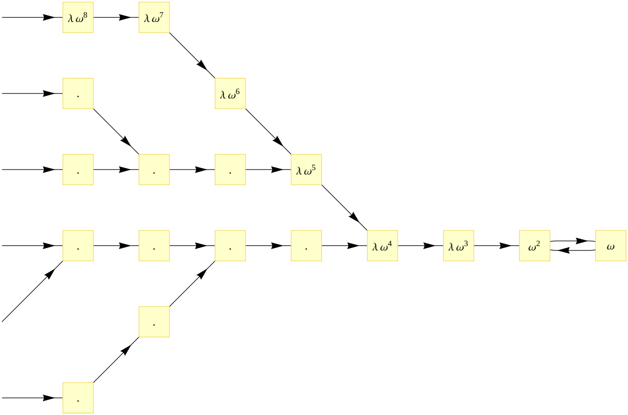
Matrix A: Eigenwaarden bij cykels

- Kies $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, en $I_C \subset G_C$
- Kies $\mathbf{v} = \sum_{n \in I_C, n \notin C} \lambda \omega^{\ell(n)} \mathbf{e}_n + \sum_{n \in C} \omega^{\ell(n)} \mathbf{e}_n$



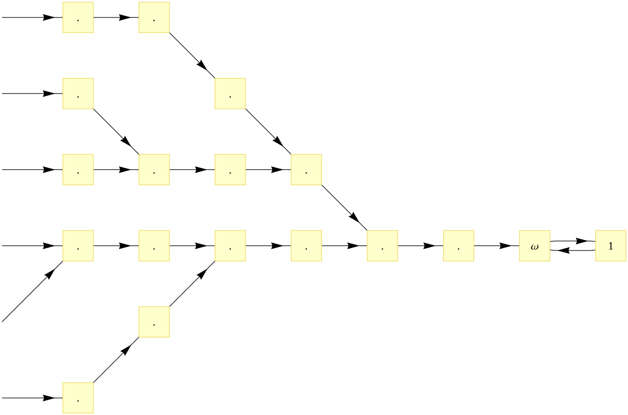
Matrix A: Eigenwaarden bij cykels

- Toepassen A: Alles schuift naar rechts op, behalve rand cykel
- $\lambda\omega^2 + 1 = \omega^2$ dus $A\mathbf{v} = \omega\mathbf{v}$ als $\lambda = 1 - \omega^{-2}$



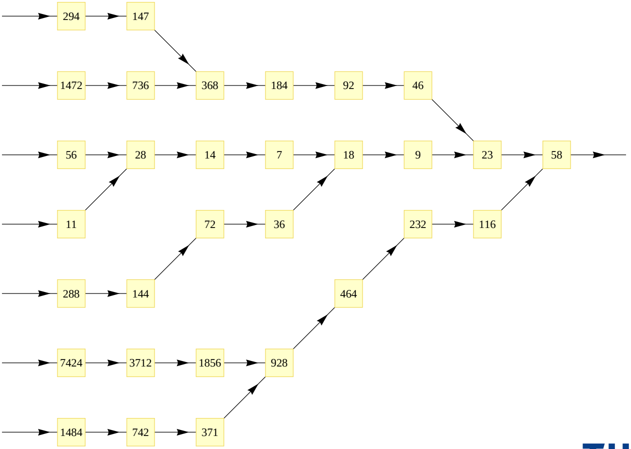
Matrix A: Eigenwaarden bij cykels

- Speciaal geval: $\lambda = 1 - \omega^{-2} = 0$, dus $\omega \in \mu_2 = \{\omega \mid \omega^2 = 1\}$
- Dan $\boldsymbol{v} = \sum_{n \in C} \omega^{\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$ en $A\boldsymbol{v} = \omega \boldsymbol{v}$



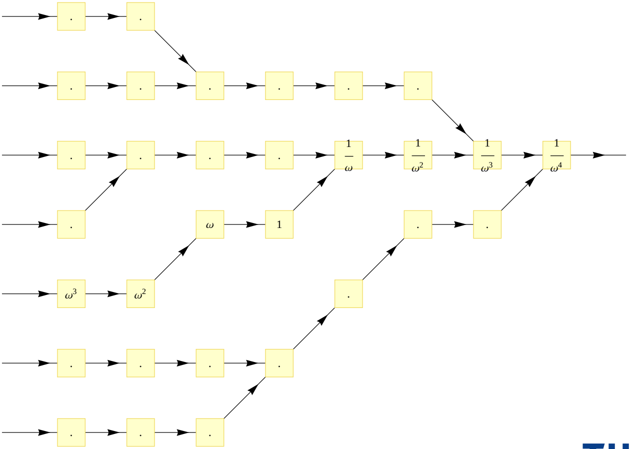
Matrix A: Eigenwaarden bij divergente paden

- Voorbeeld: $5n + 1$ probleem
- Component G_P met pad door 7 waarschijnlijk divergent



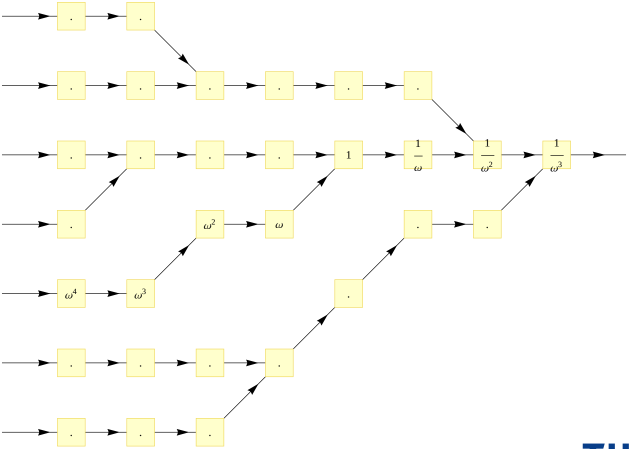
Matrix A: Eigenwaarden bij divergente paden

- Kies $\omega \in \mathbb{C}^*$ en kies een divergent pad $l_P \subset G_P$
- Kies $\boldsymbol{v} = \sum_{n \in l_P} \omega^{\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$



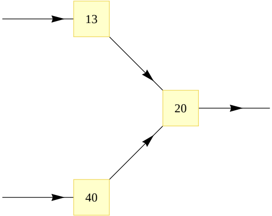
Matrix A: Eigenwaarden bij divergente paden

- Toepassen A: Alles schuift één level naar rechts op
- Dus $A\mathbf{v} = \omega \mathbf{v}$

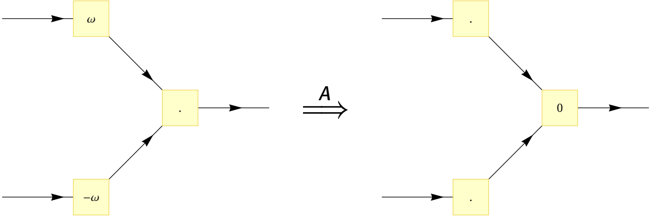


Matrix A: Eigenwaarde 0

- Voorbeeld: $3n + 1$ probleem
- Kies $\omega \in \mathbb{C}^*$ en $n \in \mathbb{N}_+$ oneven
- Voorbeeld: $n = 13$



- Kies $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_{3n+1}$
- Dan $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_{T(n)} - \boldsymbol{e}_{T(3n+1)} = \boldsymbol{0}$



Spectrum van A

- Algemeen: Cykel C van lengte k
- Eigenwaarden bij cykels met $\lambda \neq 0$:
  - Eigenwaarden: $\omega \in \mathbb{C}^*$ met $\omega \notin \mu_k$
  - Eigenvectoren: $\displaystyle\sum_{n \in I_C, n \notin C} \lambda \omega^{\ell(n)} \boldsymbol{e}_n + \sum_{n \in C} \omega^{\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$
  - Dimensie: 1 per convergent pad $I_C \subset G_C$, ∞ per component G_C
- Eigenwaarden bij cykels met $\lambda = 0$:
  - Eigenwaarden: $\omega \in \mathbb{C}^*$ met $\omega \in \mu_k$
  - Eigenvectoren: $\displaystyle\sum_{n \in C} \omega^{\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$
  - Dimensie: 1 per component G_C
- Eigenwaarden bij divergente paden:
  - Eigenwaarden: $\omega \in \mathbb{C}^*$
  - Eigenvectoren: $\displaystyle\sum_{n \in I_P} \omega^{\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$
  - Dimensie: 1 per divergent pad $I_P \subset G_P$, ∞ per component G_P
- Overig: Eigenwaarde 0 met eigenvectoren $\boldsymbol{e}_{2n+1} - \boldsymbol{e}_{6n+4}$
- Dit zijn ze allemaal!

Spectrum van A

- $3n+1$ vermoeden: Alleen de cykel $(1,2)$ en geen divergente paden
- Eigenwaarden bij cykels met $\lambda \neq 0$:
  - Voorbeeld: Pad $(\ldots, 24, 12, 6, 3, 5, 8, 4, 2, 1)$
  - Eigenwaarde $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\omega \neq \pm 1$ met eigenvector $(1, \omega, \omega^5 - \omega^3, \omega^2 - 1, \omega^4 - \omega^2, \omega^6 - \omega^4, 0, \omega^3 - \omega, 0, 0, \ldots)$
- Eigenwaarden bij cykels met $\lambda = 0$:
  - Eigenwaarde 1 met eigenvector $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$
  - Eigenwaarde -1 met eigenvector $(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$
- $3n+1$ vermoeden: Eigenruimte bij eigenwaarde 1 is 1-dimensionaal

Matrix A^T

- Bekijk de getransponeerde matrix A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & \cdots \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & \cdots \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & \ddots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- A^T achteruit in de graaf
- $A^T \mathbf{e}_i = \sum_{j \in T^{-1}(i)} \mathbf{e}_j$
- Eigenwaarden? Eigenvectoren?

Spectrum van A^T

- Algemeen: Cykel C van lengte k
- Eigenwaarden bij cykels:
  - Eigenwaarden: $\omega \in \mathbb{C}^*$ met $\omega \in \mu_k$
  - Eigenvectoren: $\sum_{n \in G_C} \omega^{-\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$
  - Dimensie: 1 per component G_C
- Eigenwaarden bij divergente paden:
  - Eigenwaarden: $\omega \in \mathbb{C}^*$
  - Eigenvectoren: $\sum_{n \in G_P} \omega^{-\ell(n)} \boldsymbol{e}_n$
  - Dimensie: 1 per component G_P
- Merk op: Eigenvectoren horen hier bij componenten i.p.v. paden
- Dit zijn ze allemaal!

Spectrum van A^T

- $3n + 1$ vermoeden: Alleen de cykel $(1, 2)$ en geen divergente paden
- Eigenwaarde bij cykels:
  - Eigenwaarde 1 met eigenvector $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$
  - Eigenwaarde -1 met eigenvector $(1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, \ldots)$
- $3n + 1$ vermoeden: Eigenruimte bij eigenwaarde 1 is 1-dimensionaal

Andere problemen

- Ook toepasbaar voor $pn + q$ problemen, Collatz-achtige functies
- Toepasbaar voor elke surjectieve functie $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$
  - Voor $f(n) = 2n$ zijn er geen eigenwaarden bij $G_P = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$
- Alle gevallen: Dit zijn ze allemaal!
- Algemene herformuleringen voor een surjectieve functie f
  - Er zijn geen cykels
    - Er zijn geen eigenvectoren bij e.w. $\omega \neq 0$ bij A met eindige support
  - Er zijn geen divergente paden
    - Alle eigenwaarden van A^T zijn eenheidswortels
  - Er zijn k componenten
    - De eigenruimte van A^T is k-dimensionaal
  - De functie f is injectief
    - Er zijn geen eigenvectoren met eigenwaarde 0 bij A
    - De eigenruimten van A en A^T hebben dezelfde dimensie

Technische Universiteit Eindhoven University of Technology

2. Modulaire grafen en De Bruijn grafen

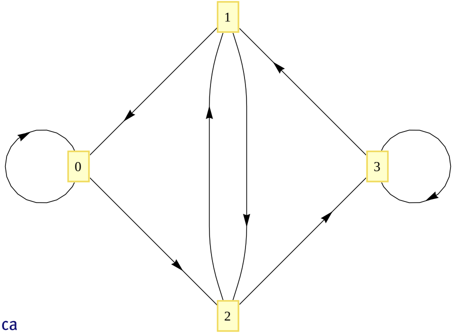
De Collatz-graaf op congruentieklassen

Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

9 juli 2009

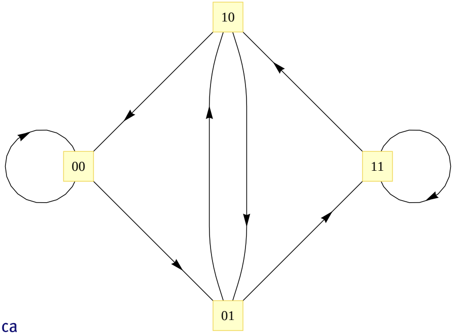
Binaire Collatz modulaire grafen

- Idee: Reduceer oneindig aantal vertices naar eindig aantal vertices
- Vervang getallen door congruentieklassen modulo $m = 2^k$
- Definitie: $\mathcal{M}_k = (V_k, E_k)$
  - $V_k = \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$
  - $E_k = \{(a, b) \mid \text{ er zijn } a_1 \in [a]_{2^k}, b_1 \in [b]_{2^k} \text{ met } T(a_1) = b_1\}$
- Voorbeeld: $k = 2$
  - $\delta^+(0) = \delta^+(1) = \{0, 2\}$
  - $\delta^+(2) = \delta^+(3) = \{1, 3\}$

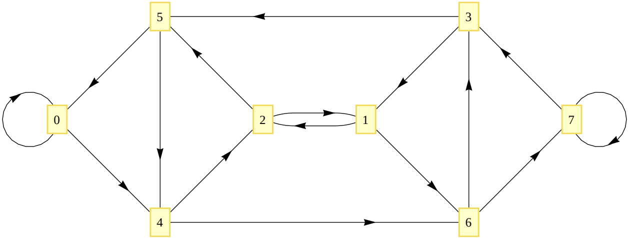


Binaire De Bruijn grafen

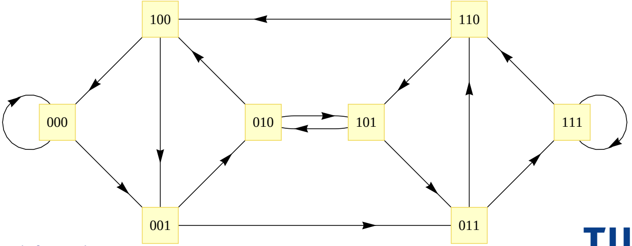
- (1946, De Bruijn) Artikel "A combinatorial problem"
- Overlappingen van rijen bits van lengte k
- Definitie: $\mathcal{B}_k = (V_k, E_k)$
  - $V_k = \{0, 1\}^k$
  - $E_k = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid a_{i+1} = b_i \text{ voor alle } i = 1, 2, \ldots, k-1\}$
- Voorbeeld: $k = 2$
  - $\delta^+(00) = \delta^+(10) = \{00, 01\}$
  - $\delta^+(01) = \delta^+(11) = \{10, 11\}$



- Binaire Collatz modulaire graaf: $\mathcal{M}_3$

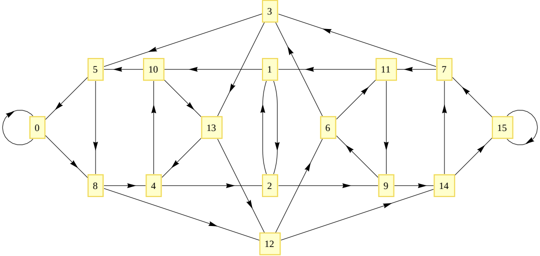


- Binaire De Bruijn graaf: $\mathcal{B}_3$

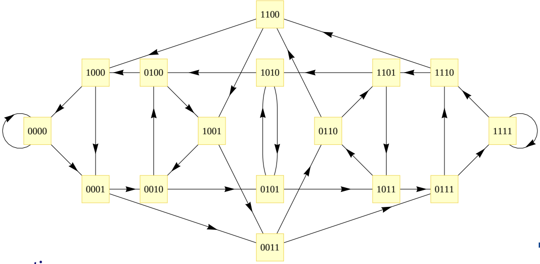


Vergelijking

- Binaire Collatz modulaire graaf: $\mathcal{M}_4$



- Binaire De Bruijn graaf: $\mathcal{B}_4$



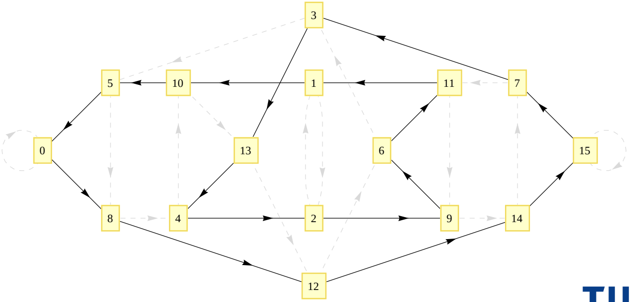
Centrale Stelling

- $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{B}_k$
- $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{M}_k^T$ (de modulaire graaf van T^{-1})
- $L(\mathcal{M}_k) \cong \mathcal{M}_{k+1}$
- $\mathcal{M}_k$ is een Euler- en Hamiltongraaf
- $(M_k^k)_{ij} = 1$ (precies 1 pad van i naar j van lengte k in $\mathcal{M}_k$)

Centrale Stelling

- $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{B}_k$
- $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{M}_k^T$ (de modulaire graaf van T^{-1})
- $L(\mathcal{M}_k) \cong \mathcal{M}_{k+1}$
- + $\mathcal{M}_k$ is een Euler- en Hamiltongraaf
- $(M_k^k)_{ij} = 1$ (precies 1 pad van i naar j van lengte k in $\mathcal{M}_k$)

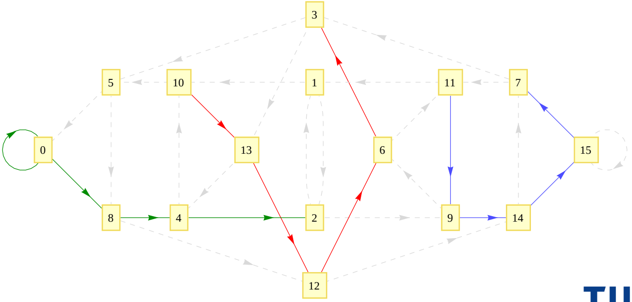
Voorbeeld: $\mathcal{M}_4$, Hamiltonpad



Centrale Stelling

- $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{B}_k$
- $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{M}_k^T$ (de modulaire graaf van T^{-1})
- $L(\mathcal{M}_k) \cong \mathcal{M}_{k+1}$
- $\mathcal{M}_k$ is een Euler- en Hamiltongraaf
- \+ $(M_k^k)_{ij} = 1$ (precies 1 pad van i naar j van lengte k in $\mathcal{M}_k$)

Voorbeeld: $\mathcal{M}_4$, $(M_4^4)_{0,2} = (M_4^4)_{10,3} = (M_4^4)_{11,7} = 1$



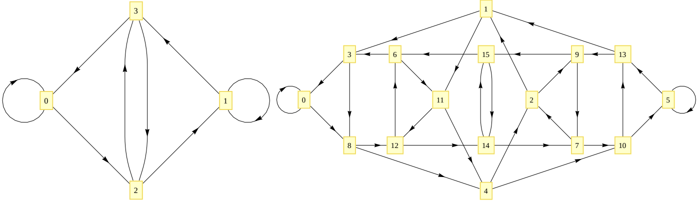
Gevolgen

- $\mathcal{G}_{2^k} \cong \mathcal{D}_k \subset \mathcal{B}_k$
  - Helaas: $\mathcal{D}_k$ ongestructureerd en chaotisch
- $\mathcal{G}_\infty \cong \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{B}_\infty$
  - Aantal cykels in $\mathcal{B}_\infty \geq$ Aantal cykels in $\mathcal{G}_\infty$
  - Maximaal aantal cykels van lengte $\leq k$ is $U_k = \frac{1}{k}\sum_{d|k} \mu(d) 2^{k/d} =$ # binaire Lyndon woorden van lengte $\leq k$
- $(M_k^k)_{ij} = 1$ dus $(M_k^{k+\ell})_{ij} = 2^\ell$ voor alle $0 \leq i, j < 2^k$
  - Als $n \equiv i \bmod 2^k$ dan $\mathbb{P}(T^k(n) \equiv j \bmod 2^\ell) = 2^{-\ell}$ voor alle j, ℓ
  - Als je alleen de laatste k bits van n weet, dan kan $T^k(n)$ alles zijn

Analogie met $pn + q$ problemen

$$T_{p,q}(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ (pn+q)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

- Voorbeeld: $5n + 1$ probleem; zelfde eigenschappen



- Bovengrens op aantal cykels van lengte $\leq k$ voor $pn + q$ problemen
  $U_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) 2^{k/d}$
- Maar ook: Er zijn $pn + q$ problemen met U_k cykels van lengte $\leq k$

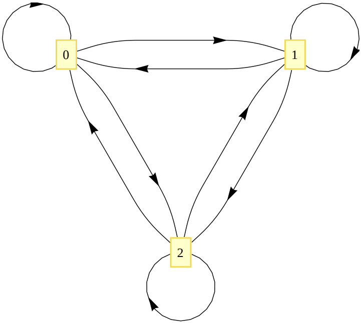
Analogie met Collatz-achtige problemen

$$C_m(n) = \begin{cases} (a_0 n + b_0)/m & n \equiv 0 \bmod m \\ (a_1 n + b_1)/m & n \equiv 1 \bmod m \\ \vdots & \vdots \\ (a_{m-1} n + b_{m-1})/m & n \equiv m-1 \bmod m \end{cases}$$

- Generaliseer binaire Collatz modulaire grafen naar m-aire Collatz modulaire grafen

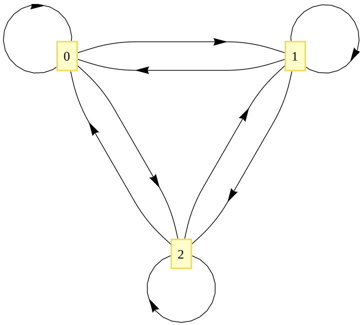
m-aire Collatz modulaire grafen

- **Definitie:** $\mathcal{M}_{m,k} = (V_{m,k}, E_{m,k})$
  - $V_{m,k} = \{0, 1, \ldots, m^k - 1\}$
  - $E_{m,k} = \{(a, b) \mid \text{ er zijn } a_1 \in [a], b_1 \in [b] \text{ met } C_m(a_1) = b_1\}$
- **Voorbeeld:** $C_3(n)$, $k = 1$
  - $\delta^+(0) = \delta^+(1) = \delta^+(2) = \{0, 1, 2\}$



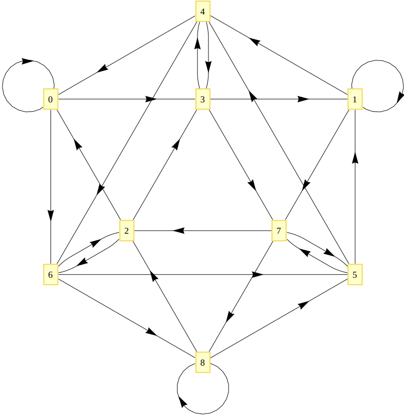
m-aire De Bruijn grafen

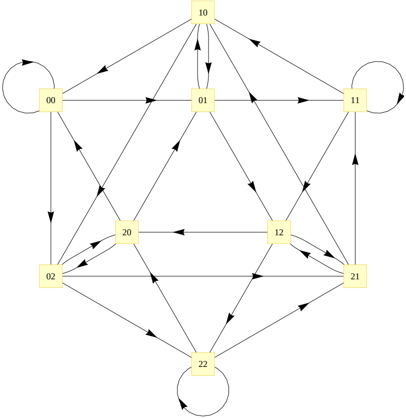
- Definitie: $\mathcal{B}_{m,k} = (V_{m,k}, E_{m,k})$
  - $V_{m,k} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}^k$
  - $E_{m,k} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid a_{i+1} = b_i \text{ voor alle } i = 1, 2, \ldots, k-1\}$
- Voorbeeld: $m = 3$, $k = 1$
  - $\delta^+(0) = \delta^+(1) = \delta^+(2) = \{0, 1, 2\}$



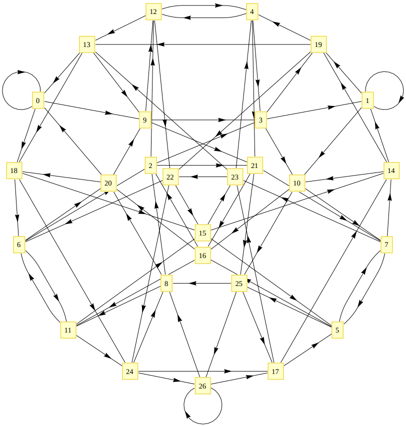
m-aire Collatz modulaire grafen

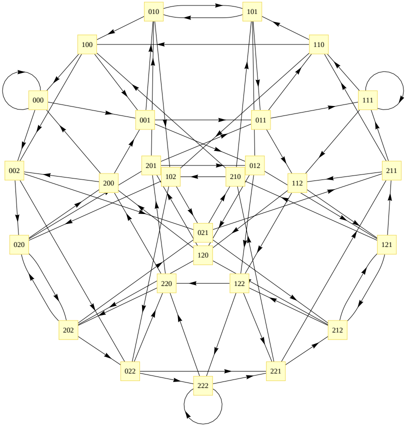
- Ternaire Collatz modulaire graaf $\mathcal{C}_{3,2}$ en De Bruijn graaf $\mathcal{B}_{3,2}$





- Ternaire Collatz modulaire graaf $\mathcal{C}_{3,3}$ en De Bruijn graaf $\mathcal{B}_{3,3}$





m-aire Collatz modulaire grafen

Algemeen: m-aire Collatz modulaire grafen isomorf met m-aire De Bruijn grafen.

- $\mathcal{C}_{m,k} \cong \mathcal{B}_{m,k}$
- $\mathcal{C}_{m,k} \cong (\mathcal{C}_{m,k})^T$
- $L(\mathcal{C}_{m,k}) \cong \mathcal{C}_{m,k+1}$
- $\mathcal{C}_{m,k}$ is een Euler- en Hamiltongraaf
- $(C_{m,k}^k)_{ij} = 1$

Conclusie

- 1. De Collatz-graaf en zijn spectrum
  - Compleet overzicht van eigenwaarden/-vectoren van A en A^T
  - $3n + 1$ vermoeden kunnen herformuleren in termen van dit spectrum
  - Ook toepasbaar op algemene surjectieve afbeeldingen $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$
- 2. Modulaire grafen en De Bruijn grafen
  - Isomorfie tussen binaire modulaire Collatz-grafen en De Bruijn-grafen
  - Aantal interessante consequenties van de Centrale Stelling
  - Ook isomorfie voor $pn + q$ problemen
  - Isomorfie tussen Collatz-achtige problemen en n-aire De Bruijn-grafen

Vragen?

TU/e Technische Universiteit **Eindhoven** University of Technology